1П

УДК 681.3

А.В. Панишев[1], А.Ю. Левченко[1], О.Б. Маций[2]
[1] Житомирский государственный технологический университет, Украина
[2] Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Украина
dear_anton@yahoo.com, irinagar@rambler.ru

Оптимизация замкнутых маршрутов на транспортной сети

Предложен точный алгоритм ветвей и границ для решения замкнутой общей задачи коммивояжера. Среди решений с одинаковой стоимостью выбирается то, что содержит в себе наименьшее количество ребер.

Постановка задачи

В статье рассматривается задача нахождения замкнутого маршрута минимальной стоимости, который проходит по всем пунктам транспортной сети.

Транспортная сеть представлена связным взвешенным графом $H=(V,U)$, где V – множество вершин, U – множество ребер. Пункту i сети соответствует вершина $i \in V$ графа H, $|V|=n$, а отрезку дорожного полотна, связывающего два соседних пункта i и j, отвечает ребро $\{i,j\} \in U$. Каждому ребру $\{i,j\}$ приписан вес $d_{ij} \in R_0^+$, равный стоимости проезда или расстоянию между пунктами i и j; R_0^+ – множество действительных неотрицательных чисел. Предполагается, что $d_{ij} = d_{ji}$.

Требуется построить замкнутый маршрут, проходящий по всем вершинам графа H и имеющий минимальную сумму весов ребер (минимальную стоимость).

Сформулированная задача получила название общей задачи коммивояжера (ОЗК) [1], а ее решение – маршрутом коммивояжера.

Маршрутом в графе H называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, а цепью – маршрут, все ребра которого различны. Простая цепь – это маршрут, состоящий из различных вершин. Замкнутый маршрут называется циклом, а цикл, в котором все вершины различны, – простым. Простой цикл, проходящий по всем вершинам графа H точно один раз, называется гамильтоновым циклом, или обходом. ОЗК, в которой требуется найти обход с минимальной суммой весов ребер, известна как гамильтонова задача коммивояжера (ГЗК) [1], [2]. Не всякий граф содержит гамильтонов цикл, то есть не каждый граф гамильтонов. Следовательно, ГЗК в отличие от ОЗК не всегда имеет решение.

Исследованию ОЗК посвящено ограниченное число работ, в которых в основном обсуждаются подходы к построению алгоритмов ее решения. Вместе с тем проблема нахождения оптимальных гамильтоновых циклов в полном графе всесторонне изучена. В данной статье развиваются результаты из [1], [2], ориентированные на сведение ОЗК к известной метрической задаче коммивояжера (ЗК).

Обоснование и описание алгоритма

Известно, что ГЗК NP – трудна [3]. Этот же статус имеет ее частный случай, который состоит в определении гамильтоновости графа. Поэтому найти решение ГЗК или установить, что ее граф негамильтонов, можно только методами с экспоненциальной трудоемкостью вычислений. Так как множество циклов, проходящих по всем вершинам связного графа, не пусто, то, очевидно, ОЗК поддается приближенному решению за полиномиальное время. Ниже изложен точный алгоритм решения ОЗК, построенный на ее сведении к метрической ЗК, которая состоит в нахождении гамильтонова цикла минимальной стоимости в полном графе $H_\alpha = (V, E)$ с весами ребер $\{i, j\}$, равными кратчайшим расстояниям между вершинами i и j графа $H = (V, U)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Каждому ребру $\{i, j\} \in U$ графа $H = (V, U)$ поставим в соответствие множество A_{ij} простых цепей, в которых вершины i и j являются концевыми. Множество A_{ij} содержит единственную цепь, состоящую из ребра $\{i, j\}$, если в графе H нет других простых цепей, соединяющих вершины i и j. Выберем в A_{ij} цепь α_{ij}, ребра которой в совокупности имеют наименьший вес $D(\alpha_{ij})$. Назовем ее кратчайшей цепью между вершинами i и j. В зависимости от значений d_{ij} получим случай а), когда для всех ребер $\{i, j\} \in U$ выполняется неравенство

$$d_{ij} \le D(\alpha_{ij}), \qquad (1)$$

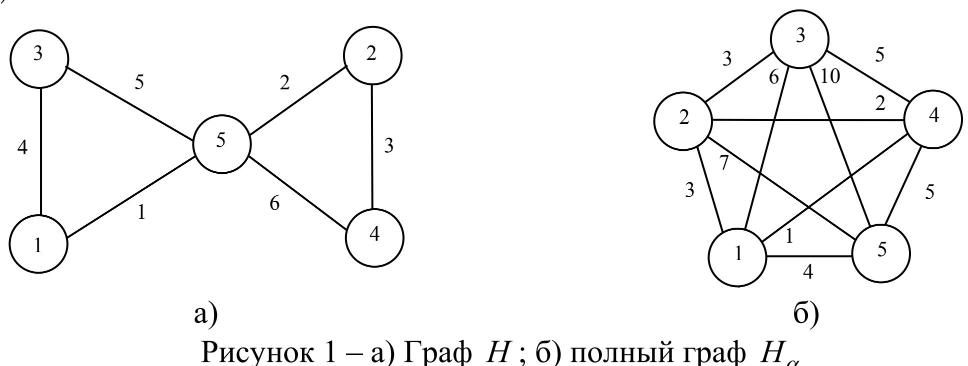
и случай б), когда оно нарушается хотя бы для одного ребра. Неравенство (1) харатеризует весовые соотношения ребер в графе H подобно неравенству треугольника

$$d_{ik} \le d_{ij} + d_{jk}, \qquad (2)$$

которое должно выполняться для всех троек вершин $i, j, k \in V$, $i \ne j$, $j \ne k$, полного взвешенного графа $H_n = (V, E)$ в метрической ЗК [1].

Найдем любым известным методом, например, алгоритмом Флойда – Уоршалла [1], кратчайшие цепи α_{ij} между всеми вершинами графа H и определим их веса $D(\alpha_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ [1].

Матрица $\left[D(\alpha_{ij})\right]_n$ удовлетворяет неравенству (2) и вместе с матрицей $\left[\alpha_{ij}\right]_n$ задает полный граф $H_\alpha = (V, E)$, где каждое ребро $\{i, j\}$ отвечает цепи α_{ij} в H весом $D(\alpha_{ij})$ (рис. 1).



а) б)

Рисунок 1 – а) Граф H; б) полный граф H_α

Пусть граф $H=(V,U)$ гамильтонов, τ, Т – оптимальные решения соответственно ГЗК и ОЗК, построенные в H, $D(\tau)$ и $C(\mathrm{T})$ – стоимости построенных решений. Найдем обход σ минимальной стоимости в полном графе H_α.

Утверждение 1. Если для всех ребер $\{i,j\}\in U$ гамильтонова графа $H=(V,U)$ выполняется неравенство (1), то $\mathrm{T}=\tau$, $C(\mathrm{T})=D(\tau)$.

Доказательство. Решение ГЗК τ содержит n ребер множества U. В случае а) ребро $\{i,j\}$ полного графа H_α имеет вес $D(\alpha_{ij})=d_{ij}$, если $\{i,j\}\in U$, и $D(\alpha_{ij})\geq d_{ij}$ иначе. Отсюда следует, что в H_α точное решение ЗК σ совпадает с τ, а его стоимость не превышает стоимость произвольного маршрута, который содержит n и больше ребер, включая Т.

Утверждение 2. Если хотя бы для одного ребра $\{i,j\}$ гамильтонова графа $H=(V,U)$ неравенство (1) не выполняется, то $C(\mathrm{T})\leq D(\sigma)$.

Доказательство. В случае б) в полном графе H_α найдется по крайней мере одно ребро $\{i,j\}$, которое в H имеет вес $d_{ij}>D(\alpha_{ij})$. Если гамильтонов цикл σ графа H_α проходит по ребру $\{i,j\}$, то его стоимость больше стоимости соответствующего замкнутого маршрута в H, содержащего вместо ребра $\{i,j\}\in U$ цепь α_{ij}. Если цикл σ не включает ребер, которые нарушают неравенство (1), то он совпадает с решением ГЗК.

Допустим, что граф $H=(V,U)$ не гамильтонов. Тогда в любом случае а) или б) стоимость оптимального решения ЗК σ для полного графа $H_\alpha=(V,E)$ равна стоимости решения ОЗК Т для графа H. Поэтому маршрут Т можно найти в результате построения в графе H_α гамильтонова цикла σ и замены в нем каждого ребра $\{i,j\}\in E$ на цепь α_{ij} из ребер множества U.

Приведенные рассуждения позволяют описать алгоритм решения ОЗК.

S0. $H=(V,U)$ – связный взвешенный граф с множеством вершин V, $|V|=n$, и множеством ребер U, $[d_{ij}]_n$ – матрица весов ребер графа H, где $d_{ij}\in R_0^+$, если $\{i,j\}\in U$, и $d_{ij}=\infty$ иначе, $i,j=\overline{1,n}$, R_0^+ – множество действительных неотрицательных чисел.

S1. Построить матрицу $[\alpha_{ij}]_n$ кратчайших цепей между всеми парами вершин графа H и матрицу $[D(\alpha_{ij})]_n$, в которой элемент (i,j) равен весу $D(\alpha_{ij})$ цепи α_{ij}; матрицы $[\alpha_{ij}]_n$ и $[D(\alpha_{ij})]_n$ определяют полный взвешенный граф $H_\alpha=(V,E)$, где каждое ребро $\{i,j\}$ заменяет цепь α_{ij} в графе H.

S2. В графе H_α найти обход минимальной стоимости σ любым известным методом решения метрической ЗК.

S3. Построить оптимальное решение ОЗК Т в результате замены каждого ребра $\{i,j\}$ гамильтонова цикла σ на цепь α_{ij} графа H.

Минимизация длины маршрута коммивояжера

Количество ребер в маршруте называется его длиной [4]. В общем случае связный граф H содержит несколько замкнутых маршрутов коммивояжера минимальной стоимости, включающих разное число ребер. Представленный алгоритм строит какой-либо из них. Потребуем, чтобы длина маршрута коммивояжера была наименьшей.

Для выполнения этого требования достаточно применить на шаге S2 классический алгоритм решения ЗК (метод Литтла) с дополнениями к правилу выбора вершины ветвления.

В методе Литтла ветвление выполняется после приведения исходной матрицы стоимостей и представляет собой пошаговый процесс разбиения множества решений ЗК на непересекающиеся множества, изображаемые в бинарном дереве перебора в виде вершин [5]. Корню дерева решений соответствует вершина $\varnothing$, которая обозначает множество всех допустимых решений ЗК. Она является начальной вершиной ветвления.

Пусть $D\left(\alpha_{ij}\right)$ – значение элемента (i,j) приведенной матрицы стоимостей, $i,j = \overline{1,n}$. Каждый элемент матрицы представлен дугой в ориентированном мультиграфе G_α, где любые две вершины i и j соединены парой дуг (i,j) и (j,i).

Ветвление начинается с выбора дуги (k,l) мультиграфа G_α, которая, исходя из значений элементов приведенной матрицы, оценивается как наиболее подходящая для включения в искомое решение. Дуга (k,l) разбивает множество всех решений $\varnothing$ на два подмножества. Решения одного подмножества включают дугу (k,l), а решения другого не содержат ее. Корень дерева $\varnothing$ порождает две текущие активные вершины. Обозначим их соответственно $\left((k,l)\circ\right)$ и $\left(\left(\overline{k,l}\right)\circ\right)$. Для подмножеств $\left((k,l)\circ\right)$ и $\left(\left(\overline{k,l}\right)\circ\right)$ вычисляются нижние границы стоимостей решений ЗК $\varphi\left((k,l)\circ\right)$ и $\varphi\left(\left(\overline{k,l}\right)\circ\right)$, в каждую из которых входит своя константа приведения [6]. Вершина с наименьшей нижней границей выбирается в качестве вершины ветвления.

По матрице, соответствующей выбранной вершине, определяется следующая дуга (r,s), инициирующая ветвление. Если $\varphi\left((k,l)\circ\right) \le \varphi\left(\left(\overline{k,l}\right)\circ\right)$, то множество $\left((k,l)\circ\right)$ разбивается на подмножества $\left((k,l),(r,s)\circ\right)$ и $\left((k,l)\left(\overline{r,s}\right)\circ\right)$, иначе множество $\left(\left(\overline{k,l}\right)\circ\right)$ разбивается на подмножества $\left(\left(\overline{k,l}\right),(r,s)\circ\right)$ и $\left(\left(\overline{k,l}\right)\left(\overline{r,s}\right)\circ\right)$. Вершина ветвления порождает пару текущих активных вершин, затем формируются соответствующие им приведенные матрицы, по которым находятся нижние границы для каждого из двух полученных подмножеств разбиения. Очередная вершина ветвления определяется среди всех текущих активных вершин, представленных висячими вершинами в дереве перебора. Путь из корня в висячую вершину содержит часть допустимого решения ЗК, состоящую из включенных в процессе ветвления дуг. Алгоритм Литтла завершает работу, когда следующая вершина ветвления включает все дуги обхода в графе G_α.

Если на каком-либо шаге ветвления несколько активных текущих вершин получают наименьшее значение для своих нижних границ, то метод Литтла не гарантирует решение ОЗК, минимальной длины. Поэтому, чтобы найти такое решение, в процессе построения дерева перебора для каждой его вершины вместе с нижней границей стоимости определяется параметр, оценивающий длину частичного решения.

В строящемся дереве перебора путь из корня в висячую вершину содержит дуги, включенные и не включенные в частичное решение. Обозначим $P_j = \left\{\left(v_{j_p}, v_{j_q}\right)\right\}$ множество дуг, включенных в частичное решение в результате построения пути из корня дерева в висячую вершину j. Каждая дуга $\left(v_{j_p}, v_{j_q}\right)$ множества P_j в мультиграфах G_α является дугой $\left(v_p, v_q\right)$, которой в графе H соответствует кратчайшая цепь α_{pq}, соединяющая вершины p и q и содержащая $l(p,q)$ ребер. Тогда частичное решение, полученное для вершины j, включает

$$l_j = \sum_{\left(v_{j_p}, v_{j_q}\right)\in P_j} l\left(\alpha_{pq}\right) \tag{3}$$

ребер графа H. В методе Литтла для каждой вершины j, порожденной на шаге ветвления, к нижней границе стоимости φ_j добавим оценку

$$L_j = l_j - \left|P_j\right|. \tag{4}$$

Из двух и более активных текущих вершин с наименьшим значением нижних границ, в качестве вершины ветвления выбирается та, для которой оценка (4) минимальна.

Пусть в связном графе $H = (V,U)$ Т – точное решение ОЗК с наименьшим числом ребер $|\mathrm{T}|$. Тогда если $|\mathrm{T}| = n$, то из утверждений 1 и 2 следует, что граф H – гамильтонов. Если $|\mathrm{T}| > n$, то граф H либо не гамильтонов, либо такой гамильтонов граф, в котором, по крайней мере, для одного ребра неравенство (1) не выполняется. Другими словами, алгоритм решения ОЗК Т минимальной длины является алгоритмом поиска решения ГЗК для графа H в случае а). Для графа H в случае б) поиск решения ГЗК выполняется алгоритмом, предложенным в [7].

Пример

Найдем маршрут коммивояжера, содержащий минимальное число ребер для графа, изображенного на рис. 1 а). После выполнения шагов S0 и S1 алгоритма точного решения СЗК получим матрицы:

$$\left[d_{ij}\right]_5 = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & \infty & 4 & \infty & 1 \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 \\ 3 & 4 & \infty & \infty & \infty & 5 \\ 4 & \infty & 3 & \infty & \infty & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 6 & \infty \\ \hline \end{array}, \qquad \left[D\left(\alpha_{ij}\right)\right]_5 = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 3 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & \infty & 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & \infty & 10 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 10 & \infty & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 5 & \infty \\ \hline \end{array},$$

$$\left[\alpha_{ij}\right]_5 = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & (1,5,2) & (1,3) & (1,5,2,4) & (1,5) \\ 2 & (2,5,1) & 0 & (2,5,3) & (2,4) & (2,5) \\ 3 & (3,1) & (3,5,2) & 0 & (3,5,2,4) & (3,5) \\ 4 & (4,2,5,1) & (4,2) & (4,2,5,3) & 0 & (4,2,5) \\ 5 & (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,2,4) & 0 \\ \hline \end{array},$$

$$\left[l\left(\alpha_{ij}\right)\right]_5 = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

На шаге S2 построим обход минимальной стоимости для полного графа H_α, представленного на рис. 1 б). Построение выполним модификацией метода Литтла, минимизирующей число ребер в решении ОЗК T. На рис. 2 представлено дерево перебора, по которому находится обход минимальной стоимости в графе H_α и маршрут коммивояжера минимальной длины в графе H.

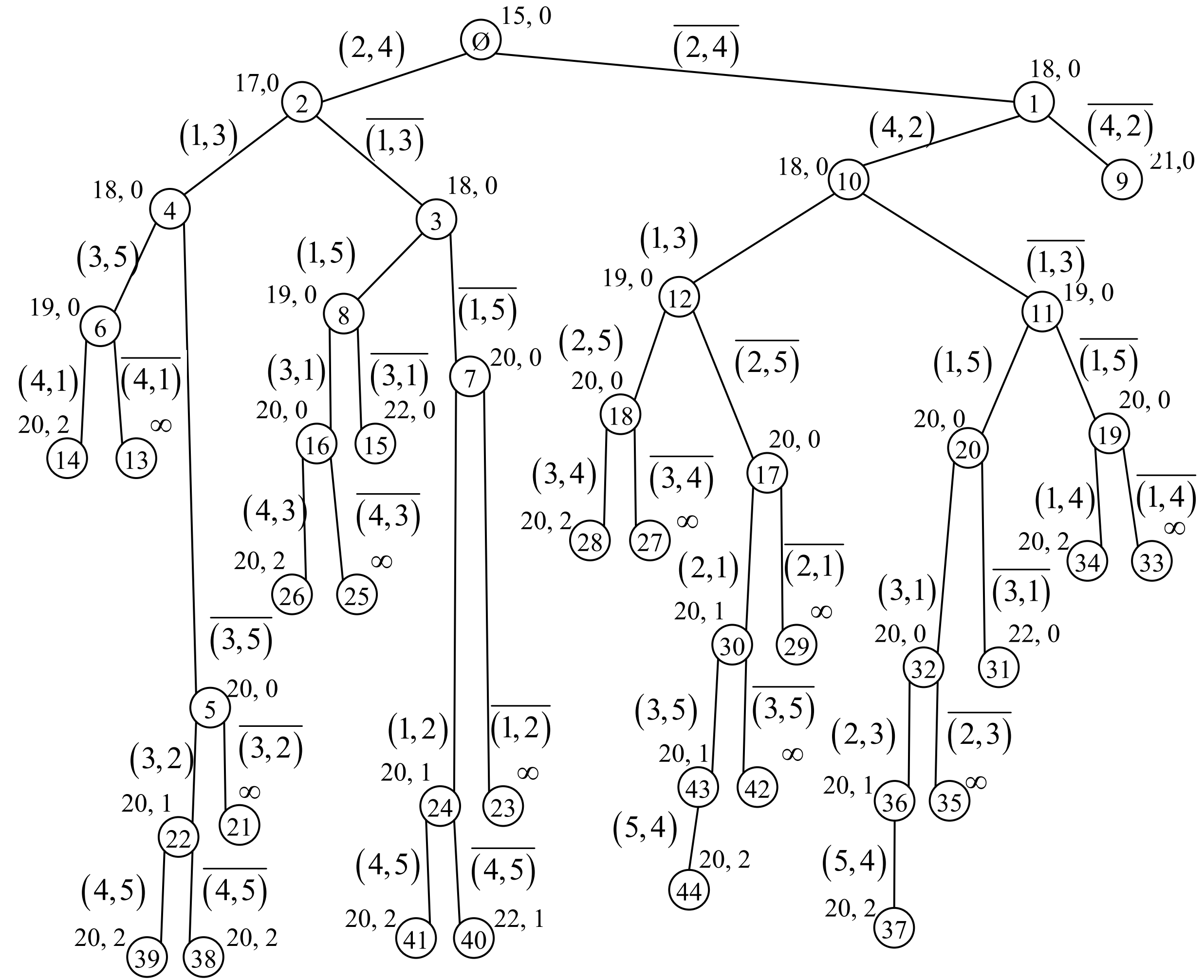


Рисунок 2 – Дерево поиска модифицированного алгоритма Литтла

Каждой вершине дерева приписано значение нижней границы стоимости частичного решения и число, вычисляемое по формулам (3) и (4). Граф H содержит несколько оптимальных маршрутов коммивояжера равной длины. Например, ОЗК находится из пути от корня $\varnothing$ дерева до вершины 37. Этот путь включает дуги (4, 2), (1,5), (3, 1), (2,3), (5,4), образуя в полном графе H_α цикл (1, 5, 4, 2, 3, 1) стоимостью 20.

На шаге S3 выполним замену ребер {5, 4} и {2, 3} соответственно на цепи $\alpha_{54} = (5, 2, 4)$ и $\alpha_{23} = (2, 5, 3)$. В результате получим решение ОЗК $\mathrm{T} = (1, 5, 2, 4, 2, 5, 3, 1)$, состоящее из 7 ребер. Другого решения стоимостью 20 и с меньшим числом ребер в графе H нет.

Заключение

В данной статье нашли развитие изложенные в [1], [2] идеи, которые лежат в основе метода построения замкнутого маршрута минимальной стоимости, проходящего по всем пунктам транспортной сети. Задача построения такого маршрута называется общей задачей коммивояжера (ОЗК). Моделью транспортной сети является связный неполный граф с произвольно заданными неотрицательными весами (стоимостями) ребер. Показано, что если в графе содержится гамильтонов цикл, т.е. простой цикл, включающий каждую вершину точно один раз, то его стоимость не меньше стоимости решения ОЗК.

Предложен точный алгоритм решения ОЗК, выполняемый в две стадии. На первой стадии граф транспортной сети преобразуется в полный граф с весами ребер, ограниченными неравенствами треугольника. Каждому ребру $\{i, j\}$ полного графа ставится в соответствие цепь минимальной стоимости, соединяющая вершины i и j. На второй стадии применяется классический алгоритм ветвей и границ для решения метрической симметричной задачи коммивояжера, дополненный способом минимизации числа ребер в искомом маршруте.

Литература

1. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Майника Э. – М. : Мир, 1981. – 323 с.
2. Бондаренко М.Ф. Компьютерная дискретная математика / Бондаренко М.Ф., Белоус Н.В., Руткас А.Г. – Харьков : Компания СМИТ, 2004. – 476 с.
3. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М. : Мир, 1982. – 416 с.
4. Харари Ф. Теория графов / Харари Ф. – М. : Мир, 1973. – 300 с.
5. Теория расписаний и вычислительные машины / [под ред. Э.Г. Кофмана]. – М. : Наука, 1984. – 336 с.
6. Панишев А.В. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера / А.В. Панишев, Д.Д. Плечистый. – Житомир : ЖГТУ, 2006. – 300 с.
7. Garashenko Irina. Method of Finding Hamilton Routes in Transport Network / I. Garashenko, A. Panishev // Artificial Intelligence and Decision Making. – ITHEA, Sofia, 2008. – № 7. – P. 43-48.

А.В. Панішев, А.Ю. Левченко, О.Б. Маций

Оптимізація замкнених маршрутів на транспортній мережі

Запропоновано точний алгоритм гілок та меж для розв’язку замкненої загальної задачі комівояжера. Серед розв’язків з однаковою вартістю обирається той, що містить найменшу кількість ребер.

A.V. Panishev, A.Yu. Levchenko, O.B. Matziy

Transport Network’s Closed Walks Optimization

The article offers exact branch and bounds algorithm of closed common Commercial Traveler Task solution. This algorithm selects the solution, which contains minimal number of edges between equal cost solutions.

Статья поступила в редакцию 25.01.2010.